Géométrie Algébrique / Théorie de Nombres
Algebraic Geometry / Number theory

Uniformité des points rationnels des courbes algébriques sur les extensions quadratiques et cubiques

Dan Abramovich

Résumé. L. Caporaso, J. Harris et B. Mazur ont montré le résultat suivant: la conjecture de Lang sur les points rationnels des variétés de type général entraîne que le nombre des points rationnels d'une courbe de genre $g > 1$ est borné uniformément. Nous précisons ce résultat en montrant que cette conjecture entraîne qu'en fait ce nombre est borné uniformément pour toutes les extensions quadratiques et cubiques d'un corps de nombres donné.

Uniformity of rational points on curves over quadratic and cubic extensions

Abstract. We refine a result of L. Caporaso, J. Harris and B. Mazur, who showed that Lang's conjecture implies that the number of rational points on a curve of genus $g > 1$ is uniformly bounded. We show that the conjecture implies that this number is bounded uniformly over all quadratic and cubic extensions of a given number field.

Soit K un corps de nombres. Selon une conjecture bien connue de S. Lang (voir [3], conjecture 5.7) l'ensemble des points K-rationnels d'une variété de type général n'est pas dense (pour la topologie de Zariski). Un travail récent de L. Caporaso, J. Harris et B. Mazur [1] montre que cette conjecture entraîne l'existence d'une borne supérieure universelle pour le nombre des points K-rationnels d'une courbe lisse de genre fixé $g > 1$. L'ingrédient géométrique principal dans leur travail est le suivant: si $X \to B$ est une famille de courbes de genre > 1, il existe un entier n tel que la puissance relative X_B^n domine une variété de type général.

Nous allons démontrer un résultat plus précis:

Théorème. 1 *Supposons que la conjecture de Lang ci-dessus soit vraie. Soient K un corps de nombres et $g > 1$ un entier. Il existe un nombre $N(K, g)$ tel que, si L est une extension de degré $d \leq 3$ de K et C est une courbe projective, lisse connexe, de genre g définie sur L, on a*

$$\#C(L) < N(K, g).$$

Remarques. Le cas $d = 1$ est traité dans [1]. Nous ne détaillerons ici que le cas $d = 2$. On pourra se reporter à la fin de cette note pour quelques indications concernant le cas $d = 3$.

On peut se demander s'il y a un énoncé analogue avec «$d \leq 3$» remplacé par «$d \leq d_0$», où d_0 est un entier quelconque.

Je tiens a remercier S. David, E. Izadi, J.-P. Serre et le référé de m'avoir aidé a améliorer la qualité de l'exposition et de la traduction française de cette note.

Préliminaires sur les familles de courbes. Soit $\pi : X \to B$ une K-famille de courbes, c'est-à-dire un morphisme projectif lisse de variétés définies sur K, dont les fibres sont des courbes géométriquement irréductibles. On écrit: $Y_n = \mathrm{Sym}^2(X^n_B)$. Soit $B' \subset \mathrm{Sym}^2 B$, posons $Y_{n,B'} = (\mathrm{Sym}^2(X^n_B))|_{B'}$. Soient L une extension quadratique de K et σ l'involution de L qui fixe K. Si $(P_1, \ldots, P_n) \in X^n_B(L)$, on dispose d'un point K-rationnel $y_{(P_1,\ldots,P_n)}$ de Y_n:

$$y_{(P_1,\ldots,P_n)} = \{(P_1, \ldots, P_n), (P_1, \ldots, P_n)^\sigma\}.$$

Terminologie: Une K-variété X est dite *de Lang* si $X_{\overline{K}}$ domine une variété de type général.

Proposition 1 *Supposons que les fibres de $X \to B$ soient de genre > 1, et soit B' une sous-variété de $\mathrm{Sym}^2 B$. Il existe un entier $n > 0$ tel que $Y_{n,B'}$ soit une variété de Lang.*

Démonstration: Voir [1], §3-5: il suffit de montrer que l'image $\overline{Y}_n$ de Y_n dans $Sym^2(\mathcal{M}_{g,n})$ est de type général. D'après [1], §5, la variété $\overline{Y}_n$ est birationelle au quotient d'une «famille tautologique» par une action diagonale d'un group fini: il existe deux famille plates $C_i \to \tilde{B}, i = 1, 2$ de courbes stables telles que, pour $W = C_1 \times_{\tilde{B}} C_2$, il existe un group fini G et une action de G sur $W \to \tilde{B}$, et $(W^n_{\tilde{B}})/G$ est birationelle à $\overline{Y}_n$; on peut supposer que $\tilde{B}$ est une variété projective lisse, le discriminant de W sur $\tilde{B}$ est un diviseur à croisements normaux, et l'application $\tilde{B} \to (\mathcal{M}_g)^2$ génériquement finie. D'après [1], §3, une puissance du faisceau dualisant relatif $\omega_{W/\tilde{B}}$ contient un sous-faisceau ample, et selon [1] §4, la variété quotient $(W^n_{\tilde{B}})/G$ est de type général.

[B. Hassett [2] a démontré un résultat plus fort, en utilisant la théorie des surfaces stables de Kollár et Shepherd-Barron: une puissance relative assez grande d'une famille de surfaces de type général est une variété de Lang.]

Vu la proposition 1, la conjecture de Lang dit que l'ensemble des points rationnels de $Y_{n,B'}$ n'est pas dense. Pour contrôler les points d'une sous-variété $D \subset Y_{n,B'}$, qui possède un morphisme $D \to Y_{n-1}$ de dimension relative ≤ 1, la proposition suivante nous sera utile.

Proposition 2 *Soit $f : D \to Z$ une famille plate de dimension relative pure 1. Supposons que toute composante irréductible d'une fibre géométrique soit de genre géométrique ≥ 2. Alors, si n est un entier assez grand, toute composante géométrique irréductible de D^n_Z est une variété de Lang.*

Démonstration: nous allons nous ramener au cas, traité dans [1], où les fibres sont irréductibles. La question étant géométrique, on peut remplacer K par $\overline{K}$; quitte à remplacer Z par un ouvert, on peut aussi supposer f lisse et D normale. De plus, il est aisé de voir qu'il suffit de considérer le cas où D est irréductible. Soit $D \xrightarrow{f'} Z' \to Z$ la factorisation de Stein de f; les fibres de f' sont connexes. Si $z \in Z$ est un point général, posons $D_z = \cup_{1 \leq i \leq c} C_i$, où les C_i sont les composantes connexes de D_z. Soit M une composante connexe de D_Z^n pour n quelconque. La fibre de M au-dessus de z est formée de n-uplets de points $(P_j)_{j=1}^n$. Pour tout i il existe un ensemble d'indices J_i tel que pour $j \in J_i$ on a $P_j \in C_i$. Choisissons J_i de cardinal $\geq n/c$. Si n est assez grand, alors $\# J_i = n_i$ l'est aussi. Nous disposons d'un morphisme $M \to D_Z^{J_i} \cong D_Z^{n_i}$. L'image de M dans $D_Z^{J_i}$ est la sous-variété $D_{Z'}^{J_i}$ des n_i-uplets de points qui sont contenus dans la même composante d'une fibre de f. D'après [1], si n_i est assez grand $D_{Z'}^{J_i}$ est une variété de Lang, donc M l'est aussi.

Nous aurons besoin d'un resultat semblable à la proposition 2, où D n'est pas de dimension relative pure 1. Commençons par un lemme facile.

Lemme 1 *Soit $D \to Z$ un morphisme génériquement fini, et soit Δ_n la «grande diagonale» de D_Z^n (formée des n-uplets de points tels qu'au moins deux entre eux sont égaux). Alors il existe un entier n tel que $(D_Z^n \setminus \Delta_n) \to Z$ n'est pas dominant.*

Démonstration: si le degré générique de $D \to Z$ est au plus $n-1$, alors chaque n-uplet de points dans une fibre générale contient au moins deux points égaux.

Proposition 3 *Soit $D \to Z$ de dimension relative générique 1, tel que toute composante irréductible de dimension 1 d'une fibre générale est de genre géométrique au moins 2, et soit Δ_n la grande diagonale de D_Z^n. Alors, pour n assez grand, toute composante irréductible de $D_Z^n \setminus \Delta_n$ qui domine Z est une variété de Lang.*

Démonstration: cela résulte de la proposition 2 et du lemme 1.

Démonstration du théorème. La base B de la famille de courbes que nous utiliserons est le schéma de Hilbert qui paramétrise les courbes lisses projectives connexes de genre g plongées par un système linéaire 3-canonique dans un espace projectif. La famille X est la courbe universelle au-dessus de B. Chaque courbe lisse projective connexe de genre g définie sur un corps de nombres L est isomorphe à une fibre au-dessus d'un point $b \in B(L)$.

Notation: Soit $m > n \geq 1$. Nous dirons qu'un point $y \in Y_n(K)$ est *m-prolongeable* s'il exist un corps L, $[L : K] = 2$, et un «prolongement» $y_{(P_1,\dots,P_m)} \in Y_m(K)$ telle que:

1. $y = y_{(P_1,\dots,P_n)}$,
2. pour $1 \leq i \leq m$ on ait $P_i \in X(L) \setminus X(K)$, et
3. pour $1 \leq i < j \leq m$ on ait $P_i \neq P_j$.

Nous notons $E_n^{(m)}$ l'ensemble des points m-prolongeables, et $F_n^{(m)} = \overline{E_n^{(m)}}$ l'adhérence de Zariski de $E_n^{(m)}$.

Nous devons démontrer que $F_n^{(m)} = \emptyset$ pour m assez grand.

Lemme 2 *Pour tout $n \geq 1$ il existe m_n tel que $F_n^{(m_n+k)} = F_n^{(m_n)}$ pour k positif quelconque.*

En effet, pour n fixé, les variétés $F_n^{(m)}$ forment une suite décroissante de fermées dans l'espace noetherien Y_n.

Posons $F_n = F_n^{(m_n)}$.

Lemme 3 *Soient n un entier ≥ 1 et $I \subset \{1, 2, ..., n'\}$ un n-uplet. La projection $\pi_I : F_{n'} \to F_n$ est surjective.*

Démonstration: $\pi_I(E_{n'}^{(m)}) = E_n^{(m)}$.

Nous disposons d'un morphisme naturel $\pi_{n,k} : F_{n+k} \to (F_{n+1})^k_{F_n}$. Notons que par définition $\pi_{n,k}(E_{n+k}^{(m_{n+k})}) \subset (F_{n+1})^k_{F_n} - \Delta_k$. Alors le lemme 1, avec $D = F_{n+1}$ et $Z = F_n$, entraîne le lemme suivant:

Lemme 4 *Soient n un entier ≥ 1 et $y \in F_n$. La dimension de la fibre de F_{n+1} au-dessus de y est ≥ 1.*

Lemme 4bis. *Soient n, k des entiers ≥ 1 et $y \in F_n$. La dimension de la fibre de F_{n+k} au-dessus de y est $\geq k$.*

Démonstration: une récurrence sur k et le lemme 4 suffisent pour conclure.

Lemme 5 *Supposons que la conjecture de Lang soit vraie. Soient n un entier ≥ 1 et $y \in F_n$. Alors la dimension de la fibre de F_{n+1} au dessus de y est 2.*

Démonstration: supposons qu'il existe une composante irréductible de F_{n+1} dont les fibres générales sont de dimension < 2. Le lemme 4 dit que les fibres sont de dimension 1, donc pour $k \geq 1$ la dimension relative de $(F_{n+1})^k_{F_n}$ est également k. De plus, le lemme 4bis entraîne que la dimension relative de F_{n+k}

est aussi k. Donc il existe au moins une composante irréductible H_k de F_{n+k} qui domine une composante de $(F_{n+1})^k_{F_n}$. Notons que, puisque $(P_1, \ldots, P_n)$ n'est pas définie sur K, la fibre géométrique au-dessus de $y_{(P_1,\ldots,P_n)} \in Y_n$ dans Y_{n+1} est un produit de deux courbes de genre g. Donc chaque courbe contenue dans cette fibre est de genre géométrique au moins g. La proposition 3, avec $D = F_{n+1}$ et $Z = F_n$, entraîne que, pour k assez grand, la composante H_k de F_{n+k} est une variété de Lang. La conjecture de Lang entraîne alors que, pour k assez grand l'ensemble des points rationnels de H_k n'est pas dense dans H_k, mais F_{n+k} est definie comme l'adhérence de Zariski de son ensemble de points rationnels.

Lemme 5bis. *Supposons que la conjecture de Lang soit vraie. Soient n, k et y comme ci-dessus. Alors la dimension de la fibre de F_{n+k} au dessus de y est $2k$.*

Lemme 6 *Supposons que la conjecture de Lang soit vraie. Il existe une sous-variété B' de* $\mathrm{Sym}^2 B$ *telle que, pour tout entier positif k, si on écrit $I = \{n+1, \ldots, n+k\}$, on a $\pi_I(F_{n+k}) = Y_{k,B'}$. De plus, on a $F_k = Y_{k,B'}$.*

Démonstration: appliquons le lemme 5bis, et prenons B' égal à l'image de F_{n+k} dans $\mathrm{Sym}^2 B$. Appliquons le lemme 3 pour obtenir $F_k = Y_{k,B'}$.

Conclusion: la proposition 1 dit que pour k assez grand, $Y_{k,B'} = F_k$ est une variété de Lang. Par définition, l'ensemble des points rationnels de F_k est dense. Par la conjecture de Lang F_k est vide.

Remarque: pour traiter le cas des extensions de degré $d = 3$, on remplace $Y_n = \mathrm{Sym}^2(X_B^n)$ par $\mathrm{Sym}^3(X_B^n)$, et on montre comme ci-dessus que la dimension des fibres de $F_{n+1} \to F_n$ est au moins 2. On doit prouver que cette dimension est 3. Pour y parvenir, on applique le théorème de Hassett [2] sur les familles de surfaces de type général, et l'on démontre que, si la dimension des fibres est 2 et si k est assez grand, F_{n+k} est une variété de Lang.

Références

[1] L. Caporaso, J. Harris, B. Mazur: *Uniformity of rational points,* J. Amer. Math. Soc., to appear.

[2] B. Hassett: *Correlation for surfaces of general type*, preprint, 1995.

[3] S. Lang, *Hyperbolic diophantine analysis.* Bull. A.M.S. 14 (1986) p. 159-205.

Department of Mathematics, Boston University
111 Cummington Street, Boston, MA 02215, Etats - Unis
abrmovic@math.bu.edu