

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur les points paraboliques des surfaces : erratum et compléments.* Note (*) de **Thomas Banchoff** et **René Thom**, Membre de l'Académie.

Correction d'une erreur dans une Note antérieure sur le nombre des singularités-godrons d'une courbe parabolique d'une surface. Liaison avec le nombre des ombilics.

Correcting an erroneous expression for the number of cusps of the Gauss map on the curve of parabolic points of a surface. Connection with the number of umbilics.

Dans une Note antérieure portant le même titre, sous la signature de Y. Kergosien et R. Thom [1], une phrase est erronée. Page 709, ligne 3, on lit : « Pour des raisons évidentes en homologie mod 2, toute réunion de composantes connexes de (P) qui borde sur la surface comporte un nombre pair de godrons ».

Ceci n'est pas exact; T. Banchoff, dans un article à paraître écrit en collaboration avec T. Gaffney et C. McCrory, cf. [2], a montré que sur la surface d'équation :

$$z = x^3 - 3xy^2 + w(x^2 + y^2) \quad (w \text{ petit}),$$

qui est une déformation du *col en selle de singe* (*Affensattelpunkt*), la courbe (P) est un cercle local qui comporte trois godrons. L'énoncé correct est le suivant : « Toute réunion de composantes connexes de (P) qui forme sur (S) le bord total d'une région hyperbolique (H) comporte un nombre pair de godrons ».

Lorsque la région hyperbolique (H) est orientable, ce résultat se trouve établi dans [3]. Il est intéressant de donner une démonstration plus générale que voici : soit (F) une surface à bord orientable porteuse d'un champ de directions X (non orientées) sur lequel on fait les hypothèses suivantes :

(i) X admet pour seules singularités des points isolés où la configuration locale des lignes intégrales de (X) est de type topologique homéomorphe, soit à  (point-bord), soit à

 (point triple).

(On sait que ces deux configurations sont celles des lignes de courbure tangentes à une direction principale au voisinage d'un ombilic générique d'une surface (S) immergée dans $\mathbb{R}^3$.)

(ii) Le champ X admet avec le bord ∂F des contacts quadratiques simples, qui peuvent être soit intérieurs à (F), soit extérieurs. Pour toute courbe c de ∂F on désignera par $i(X, c)$ le nombre des contacts intérieurs de X, par $e(X, c)$ celui des contacts extérieurs, et on posera $d(X, c) = e(X, c) - i(X, c)$.

Désignons alors par u^+ le nombre des points-bord de type , par u^- celui des points triples de type , par χ la caractéristique d'Euler-Poincaré. On a alors la généralisation d'une formule classique de Poincaré :

$$(\Delta) \quad \chi(F) = 1/2(u^+ - u^-) + 1/2\{e(X, \partial F) - i(X, \partial F)\}.$$

Revenons maintenant au cas d'une surface (S) immergée dans $\mathbb{R}^3$; soit (H) une partie hyperbolique de (S), limitée par une courbe (P) de points paraboliques génériques. Si (H) est

orientable, les deux champs de lignes de courbure sur (H) sont globalement distincts, et partout définis. On les appellera X_1, X_2 . Sur toute composante connexe (c) de (P), on appellera X_c le champ (X_c) porté par les tangentes de rebroussement aux asymptotiques.

Rappelons que le champ (X_c) est transverse à (c) sauf en des points génériquement isolés où la ligne intégrale de (X_c) admet avec (c) un contact quadratique : ces points sont les *godrons* définis dans [1]. Les godrons, qui pour le champ local des asymptotiques sont de type *foyer* ou *nœud* donnent naissance à un contact *extérieur*; le godron de type *col* donne naissance à un contact *intérieur*. Pour toute courbe parabolique (g), — non nécessairement connexe —, la différence :

$$\sum_{c \in g} e(X_c, c) - i(X_c, c) = \sum_{c \in g} d(X_c, c),$$

est le *nombre algébrique* des godrons sur cette courbe.

Si (c') est une autre composante connexe de (P), il n'est pas sûr que $X_{c'}$ soit l'extension (X_1 ou X_2) du champ X_c . Mais on observera que pour deux champs orthogonaux (X_1), (X_2) pris le long d'une courbe (γ) à voisinage normal orientable, on a toujours $d(X_1, \gamma) = d(X_2, \gamma)$. En effet, même si ces champs n'ont pas de relèvement orienté le long de γ , il existe toujours une rotation, d'angle $\pm \pi/2$ qui transforme (X_1) en (X_2) le long de (γ) : ces champs sont donc homotopes, et ont par suite même degré.

Dans la région hyperbolique (H) de bord (P), il n'y a pas d'ombilics. La formule (Δ) donne par suite, appliquée à X_1 (ou X_2) :

$$(1) \quad 2\chi(H) = \sum_{c \in P} d(X_1, c)u = \sum_{c \in P} d(X_c, c).$$

Le nombre algébrique des godrons — et par suite aussi le nombre arithmétique $e+i$ des godrons — sont donc pairs.

Si la région (H) n'est pas orientable, on forme le revêtement orientable $\tilde{H} \xrightarrow{\pi} H$ à deux feuillets. Toute courbe c du bord P de H a un voisinage orientable, donc le revêtement $\pi^{-1}(c)$ consiste de deux courbes notées c_1, c_2 (on notera $c_{12} = c_1 \cup c_2$). Les champs X_{c_1}, X_{c_2} se projettent selon (π) sur X_c , et l'on a :

$$d(X_{c_1}, c_1) = d(X_{c_2}, c_2) = d(X_c, c).$$

Désignons par X_1 un champ global de ligne de courbure sur $\tilde{H}$. On a alors par application de (Δ) :

$$2\chi(\tilde{H}) = \sum_{\substack{c^i \in P \\ i=1,2}} d(X_{c^i}, c^i) = \sum_{c^i \in P} d(X_1, c^i) = 2 \sum_{c^i \in P} d(X_{c^i}, c^i).$$

Après division par deux :

$$\chi(\tilde{H}) = 2\chi(H) = \sum_{c \in P} d(X_1, c),$$

ce qui établit la relation (1) même si (H) est non orientable.

Considérons maintenant le cas d'une région elliptique (E); (E) est alors orientable, et les deux champs de lignes de courbure (X_1), (X_2) sont globalement définis dans (E), car ils ne s'échangent jamais (l'inégalité $R_1 < R_2$ des rayons de courbure est partout définie à l'extérieur des ombilics). L'application de (Δ) donne, si $\partial E = -P$:

$$(2) \quad 2\chi(E) = d(X_1, P) + u^+ - u^-,$$

or $d(X_1, P) = \sum_{c \in P} d(\bar{X}_c, c)$, nombre algébrique des godrons, pris avec le signe moins, si on a pris pour E la région elliptique totale d'une surface (S) compacte immergée dans $\mathbb{R}^3$. Combinant (1) et (2) pour les régions (E) , (H) totales, on obtient :

$$2\chi(S) = u^+ - u^-,$$

résultat dû à E. A. Feldman [4].

(*) Remise le 20 octobre 1980.

[1] Y. L. KERGOSIEN et R. THOM, *Comptes rendus*, 290, série A, 1980, p. 705.

[2] T. F. BANCHOFF, *Computer Animation and the Geometry of Surfaces in 3 and 4 Space (Proceedings of the Int. Congress of Mathematicians, Helsinki, 1978)*.

[3] D. BLEEKER et L. WILSON, *Illinois J. Math.* 22, n° 2, 1978, p. 287).

[4] E. A. FELDMAN, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 127, 1977, p. 1-28.

2, avenue Charles-Comar, 91440 Bures-sur-Yvette.